



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

APLICAÇÕES DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTIMICAS

MURILO SERGIO ROBALLO

Brasília

2014



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

APLICAÇÕES DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTIMICAS

Autor: Murilo Sérgio Roballo

Orientador: Prof. Dr. Helder de Carvalho Matos

Monografia apresentada ao PROFMAT
para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

Brasília

2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade de
Brasília. Acervo 1016172.

R628a Roballo, Murilo Sergio.
Aplicações de funções exponenciais e logarítmicas
/ Murilo Sergio Roballo. -- 2014.
68 f. : il. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) - Universidade de Brasília,
Departamento de Matemática, Mestrado Profissionalizante
em Matemática, 2014.
Inclui bibliografia.
Orientação: Helder de Carvalho Matos.

1. Logarítmos. 2. Funções exponenciais. I. Matos,
Helder de Carvalho. II. Título.

CDU 519.662

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Aplicações de Funções Exponenciais e Logarítmicas

por

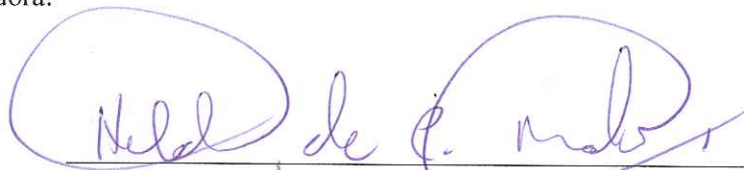
Murilo Sérgio Roballo*

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 05 de junho de 2014.

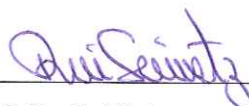
Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Helder de Carvalho Mato – MAT/UnB (Orientador)



Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha – UFSJ/MG



Prof. Dr. Rui Seimetz – MAT/UnB

À Deus, pois sem Ele nada disso seria possível.

Aos meus pais Nelson e Maria Luiza pelos valores transmitidos, ensinamentos, amor

e carinho

A minha esposa Rosane, mulher da minha vida e a minha adorada filha Caroline,

paixão do pai.

DEDICO

Agradecimentos

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) por intermédio, através do PROFMAT, uma melhor capacitação dos educadores no ensino da matemática.

Aos professores da Universidade de Brasília (UnB) que participaram do curso e contribuíram para uma melhor formação dos alunos.

Ao professor Dr. Helder de Carvalho Matos, pela colaboração no desenvolvimento desse trabalho e por todo conhecimento transmitido.

Ao professor Dr. Rui Seimetz, coordenador do PROFMAT na UnB, pela dedicação na condução do curso e pelos ensinamentos transmitidos.

Aos colegas de turma, principalmente, os amigos do Colégio Pódion e do Colégio Militar de Brasília, que dividiram angústias, participaram dos momentos de estudo coletivo e do companheirismo nos momentos mais difíceis do curso.

À CAPES pelo incentivo financeiro.

Ao colaborador Rodrigo Sato, pela ajuda na formatação do trabalho escrito.

Aos familiares, pais, irmãos, esposa e filha, pelo apoio, compreensão e incentivo para que tudo desse certo.

À Deus, por tornar isso possível.

Resumo

Esse trabalho mostra, primeiramente, o surgimento de uma poderosa ferramenta matemática que contribuiu durante aproximadamente, três séculos e meio para simplificar os cálculos aritméticos: os logaritmos. Com rapidez e precisão, operações como a multiplicação, divisão com vários algarismos ou uma potenciação com expoente fracionário, puderam ser realizadas utilizando-se as propriedades operatórias dos logaritmos. Com o advento das calculadoras eletrônicas, os logaritmos perderam sua função inicial, mas não perderam posição de destaque no ensino da Matemática e nas aplicações nas ciências modernas. Esse destaque é porque a função logarítmica e sua inversa, a função exponencial, constituem uma única maneira de se descrever, matematicamente, a evolução de uma grandeza, cuja taxa de crescimento (ou decréscimo) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente num dado momento.

A seguir são apresentadas inúmeras aplicações das funções exponenciais e logarítmicas que modelam fenômenos físicos, químicos, biológicos, geográficos, econômicos, sociais e comprovam com isso a necessidade de se conhecer e interpretar tais funções.

Palavras-chave: Logaritmo, função exponencial, função logarítmica, aplicação, modelagem matemática, número e .

Abstract

This work shows, primarily, the appearance of a powerful mathematical tool which has contributed for approximately three and a half centuries to simplify the arithmetical calculations: the logarithms. With speed and precision, operations such as multiplications, divisions with several numbers or power with fractional index, could be achieved by using logarithms operational properties. With the advent of calculators, the logarithms have lost their initial function, but not their key role in the mathematic teaching and its applications in the modern sciences. This outstanding position happens due to the fact that the logarithmical function and its inverse, the exponential function, constitute a unique manner to describe, mathematically, the evolution of size whose growth index (or decrease) becomes proportional to the amount of that former existing grandezza in a given moment.

In sequence, several exponential functions and logarithmical uses which help shape chemical, physical, biological, economical, social and geographical are introduced and display the necessity to know and interpret those functions.

Keywords: logarithm, exponential function, logarithmical function, application, mathematical shaping, number e .

Lista de Figuras

1.1	Ramo H da hipérbole.	25
1.2	Faixa do ramo H positivo da hipérbole.	26
1.3	Área da faixa do ramo H positivo da hipérbole.	27
1.4	Área do segmento de reta da faixa do ramo H positivo da hipérbole. . .	28
1.5	Área do logaritmo natural.	29
1.6	Gráfico da função exponencial.	33
1.7	Gráficos das funções exponencial e logarítmica para base > 1	34
1.8	Gráficos das funções exponencial e logarítmica para $0 < \text{base} < 1$	35
2.1	Montante para juros compostos.	39
2.2	Gráfico da função $P(t)$	41
2.3	Gráfico do decaimento radioativo.	43
2.4	Gráfico do resfriamento de um corpo.	45
2.5	Circuito elétrico.	47
2.6	Gráfico da intensidade da corrente elétrica.	49
2.7	Gráfico da intensidade luminosa $I(x)$	50
2.8	Gráfico da função $Q(t) = B - Ae^{-kt}$	52
2.9	Gráfico da logística de crescimento.	54

3.1	Função pressão atmosférica.	57
3.2	Magnitude na escala Richter.	58
3.3	Escala de Magnitude de momento.	58
3.4	Função da intensidade sonora.	59
3.5	Função pH.	62

Sumário

Introdução	13
1 Desenvolvimento	16
1.1 Potências de Expoente Racional	16
1.2 Propriedades Operatórias do logaritmo	18
1.3 Função Logarítmica	21
1.4 Logaritmo Natural	24
1.5 Função Exponencial	29
2 Leis de Crescimento e Decaimento Exponencial	36
2.1 Capitalização Contínua (Juros Compostos)	37
2.2 Crescimento Populacional	40
2.3 Decaimento Radioativo	42
2.4 Resfriamento de um corpo	44
2.5 Circuito Elétrico	46
2.6 Intensidade Luminosa	49
2.7 Curva de Aprendizagem	51

2.8	Logística de Crescimento	52
3	Aplicações da Função Logarítmica	55
3.1	Altitude de uma localidade	55
3.2	Sismologia	56
3.3	Nível de Intensidade Sonora	58
3.4	Cálculo do pH	60
4	Sugestão de Aula	63
5	Considerações Finais	65
	Referências Bibliográficas	67

Introdução

Histórico

Com o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação, no fim do século XVI, os cálculos aritméticos estavam se tornando extremamente trabalhosos e estenuantes. Assim, se tornava necessário um método que permitisse efetuar, com maior simplicidade, multiplicações, divisões, potenciações e extração de raízes.

Algumas vezes acontece que uma descoberta científica é feita quase que simultaneamente por duas ou mais pessoas trabalhando, independentemente. Tal descoberta é fruto da necessidade humana para solucionar problemas que naquele momento se tornam prioritários.

Tal fato acontece com os logaritmos. John Napier (1550 – 1617), nobre escocês, teólogo, não era matemático profissional, mas se interessava por certos aspectos da matemática, particularmente as operações e a trigonometria e *Jost Burgi* (1552 – 1632) suíço, fabricante de instrumentos astronômicos, matemático e inventor, cada um deles desconhecendo inteiramente o outro, publicaram as primeiras tabelas dos logaritmos (Tábua de logaritmos). A tábua de Napier, foi apresentada posteriormente em 1619 por um de seus maiores admiradores, *Henry Briggs* (1561 – 1631), professor de geometria

em Oxford, com o título *Mirificilogarithmorum canonis descriptio*, que significa uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos. Já o trabalho de *Jost Burgi* foi lançado em 1620, num livro intitulado *Arithmetische und geometrische Progress – Tabulen* Arithmetische und geometrische Progress – Tabulen, que significa, Progresso geométrico e aritmético – tábua.

A influência de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi muito maior do que a de *Burgi*, fato esse explicado devido ao seu relacionamento com professores universitários.

Napier partiu das propriedades das sequências aritméticas e geométricas. Para conservar próximos os termos numa progressão geométrica de potência inteira de um número dado, é necessário tomar o número dado muito próximo de um. Logo, *Napier* escolheu o número $1 - 10^{-7}$ (ou 0,9999999). Para evitar decimais *Napier* multiplicou o número por 10^7 . Isto é, se $N = 10^7(1 - 10^{-7})L$, então L é o “logaritmo” do número N . Deve-se lembrar que *Napier* não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois, sua definição era diferente da que nós temos hoje. Foi seu colaborador *Briggs* que propôs a *Napier* o uso de potências de 10 e como *Napier* estava no final da vida, coube a *Briggs*, a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos comuns.

Durante quase quatro séculos a utilização dos logaritmos como instrumento de cálculo, revelou-se de fundamental importância para o desenvolvimento da ciência, pois simplificavam, com rapidez e precisão, multiplicações e divisões em adições e subtrações, respectivamente, utilizando-se suas propriedades operatórias, as quais serão expostas nesse trabalho.

Recentemente, com a utilização das calculadoras, as tábuas de logaritmos perderam a sua utilidade como instrumento de cálculo. Mas o desenvolvimento da matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversos fenômenos físicos, químicos, biológi-

cos, geográficos e econômicos podem ser modelados a partir de funções logarítmicas e exponenciais, que serão expostas nesse trabalho.

Capítulo 1

Desenvolvimento

1.1 Potências de Expoente Racional

A análise a seguir se restringe a potências de um número positivo a . Se a fosse negativo, não haveria problema para definir a^n e a^{-n} para $n \in \mathbb{N}$. Entretanto, como veremos aqui, $a^{\frac{1}{n}}$ significa $\sqrt[n]{a}$ e considerando que números reais negativos não possuem raízes reais se o índice n for par. Isso tornaria o estudo de potências reais de expoente racional com base negativa cheio de exceções.

Seja a um número real positivo. Dado um inteiro $n > 0$, a potência a^n é definida como o produto de n fatores iguais ao número a .

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad (n \text{ fatores}).$$

Assim,

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ fatores}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}} = a^{m+n} \quad (\text{Propriedade fundamental})$$

em que m e n são, inteiros positivos.

Em particular se $m = 0$

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n, \text{ logo, conclui-se que } a^0 = 1$$

Estendendo a noção de potência para expoentes negativos e mantendo a validade da propriedade fundamental deve-se ter:

$$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1, \text{ logo, } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Como m e n são inteiros, o número $(m - n)$ também é inteiro, logo,

$$a^{m-n} = a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n}$$

Evidentemente a relação fundamental é válida para o produto de várias potências, como

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p \cdot a^q = a^{m+n+p+q}$$

Em particular, para um produto de p fatores iguais a a^m , obtém-se

$$a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m = (a^m)^p.$$

Então,

$$(a^m)^p = a^{mp}$$

Veremos que, dados um número real $a > 0$ e um número inteiro $q > 0$, o símbolo $\sqrt[q]{a}$ representa o número real positivo cuja q -ésima potência é igual a a , ou seja, a única raiz positiva da equação $x^q - a = 0$. Portanto as afirmações $\sqrt[q]{a} > 0$ e $(\sqrt[q]{a})^q = a$ constituem a definição do número real $\sqrt[q]{a}$ chamado raiz q -ésima do número positivo a .

Estendendo a noção de potência de um número real $a > 0$ para expoente fracionário da forma $r = \frac{p}{q}$, tem-se

$$a^r, r \in Q \text{ e } r = \frac{p}{q}.$$

Então, defini-se: $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$. Em particular $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$

Verificando a validade da propriedade fundamental para expoentes racionais, para $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{u}{v}$, $q > 0$ e $v > 0$, $p=rq$ e $u=sv$

Logo

$$\begin{aligned} a^{rq} &= a^p \quad \text{e} \quad a^{s \cdot v} = a^u \\ (a^r)^q &= a^p \quad \text{e} \quad (a^s)^v = a^u \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} (a^r \cdot a^s)^{qv} &= (a^r)^{qv} \cdot (a^s)^{qv} = a^{rqv} \cdot a^{sqv} \\ (a^r \cdot a^s)^{qv} &= a^{pv} \cdot a^{qu} \\ (a^r \cdot a^s)^{qv} &= a^{pv+qu} \\ a^r \cdot a^s &= a^{\frac{pv+qu}{qv}} \\ &= a^{\frac{pv}{qv} + \frac{qu}{qv}} \\ &= a^{\frac{p}{q} + \frac{u}{v}} \\ a^r \cdot a^s &= a^{r+s} \end{aligned}$$

1.2 Propriedades Operatórias do logaritmo

Define-se logaritmo de um número $x > 0$ na base $a \neq 1$ como sendo um número y , tal que $a^y = x$. Pode-se escrever

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x \quad (*)$$

Considerando os números reais $0 < a \neq 1$, $0 < c \neq 1$, $m \neq 0$, $u > 0$ e $v > 0$ dessa definição decorrem as propriedades operatórias dos logaritmos

$$\text{I)} \log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\text{II)} \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

$$\text{III)} \log_a u^v = v \cdot \log_a u$$

$$\text{IV)} \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\text{V)} \log_{a^m} x = \frac{1}{m} \cdot \log_a x$$

Demonstração.

I) Considerando u, v , números reais positivos e $0 < a \neq 1$, para mostrar que $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$, tomemos $\log_a u = x$ e $\log_a v = y$, sendo x e y números reais.

Temos, usando (*),

$$\log_a u = x \Leftrightarrow a^x = u \quad e$$

$$\log_a v = y \Leftrightarrow a^y = v$$

e assim,

$$a^x \cdot a^y = u \cdot v \Leftrightarrow$$

$$a^{x+y} = u \cdot v \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow}$$

$$x + y = \log_a(u \cdot v)$$

$$\log_a u + \log_a v = \log_a(u \cdot v)$$

□

II) Para mostrar que $\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v$, com $0 < a \neq 1$, u e v números reais positivos, considere $\log_a u = x$ e $\log_a v = y$.

Usando (*),

$$\log_a u = x \Leftrightarrow a^x = u \quad e$$

$$\log_a v = y \Leftrightarrow a^y = v$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{a^x}{a^y} &= \frac{u}{v} \Leftrightarrow \\ a^{x-y} &= \frac{u}{v} \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \\ x-y &= \log_a \left(\frac{u}{v} \right) \Leftrightarrow \\ \log_a u - \log_a v &= \log_a \left(\frac{u}{v} \right)\end{aligned}$$

□

III) Para mostrar que $\log_a u^v = v \cdot \log_a u$ com $0 < a \neq 1$, u real positivo e v real, considere $\log_a u = x$.

Usando (*),

$$\log_a u = x \Leftrightarrow a^x = u$$

Assim,

$$\begin{aligned}(a^x)^v &= u^v \Leftrightarrow \\ a^{x \cdot v} &= u^v \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \\ \log_a u^v &= x \cdot v \Leftrightarrow \\ \log_a u^v &= v \cdot \log_a u\end{aligned}$$

□

IV) Fazendo $\log_a b = x \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} a^x = b \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}\log_c a^x &= \log_c b \stackrel{(III)}{\Leftrightarrow} x \log_c a = \log_c b \Leftrightarrow \\ x &= \frac{\log_c b}{\log_c a} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}\end{aligned}$$

□

V) $\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \cdot \log_a x$

Usando a propriedade (IV)

$$\begin{aligned}\log_{a^m} x &= \frac{\log_a x}{\log_a a^m} \stackrel{(III)}{\Leftrightarrow} \\ \log_{a^m} x &= \frac{\log_a x}{m \log_a a}\end{aligned}$$

□

1.3 Função Logarítmica

Uma função real $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se função logarítmica quando é caracterizada pelas seguintes propriedades:

A) f é uma função crescente, isto é, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

B) $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

Denotamos tal função por $f(x) = \log_b x$ em que o número b é chamado base. Tradicionalmente, as bases dos logaritmos mais comuns são: base 10, chamado **logaritmo decimal**, pois, nossos números são escritos usualmente no sistema de numeração decimal e base e sendo o número $e \approx 2,718281$ (Número de Euler), chamado **logaritmo natural** ou **logaritmo neperiano** em homenagem a John Napier. Entretanto, tal denominação não é inteiramente apropriada, pois, como já foi visto, o logaritmo original definido por Napier não coincide com o logaritmo natural. O logaritmo natural será definido mais adiante no trabalho.

As propriedades a seguir são consequências de A e B enunciadas acima.

Propriedade 1

Uma função logarítmica $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é sempre monótona injetiva, isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.

Demonstração. Se $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ são diferentes, então ou $x < y$ ou $x > y$. No primeiro caso resulta de A que $f(x) < f(y)$. No segundo caso tem-se $f(x) > f(y)$. Em qualquer hipótese, de $x \neq y$ conclui-se que $f(x) \neq f(y)$. \square

Propriedade 2

O logaritmo de 1 é zero, ou seja, $\log_b 1 = 0$.

Demonstração. Por B tem-se $f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1)$, logo, $f(1) = 0$. \square

Propriedade 3

Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.

Demonstração. Como $f(x)$ é uma função crescente, toma-se $0 < x < 1 < y$. De A resulta $f(x) < f(1) < f(y)$, logo, $f(x) < 0 < f(y)$. \square

Propriedade 4

Para todo $x > 0$, tem-se $f(1/x) = -f(x)$

Demonstração. Como $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, da propriedade B tem-se que $f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(1)$, $f(x) + f(\frac{1}{x}) = f(1) = 0$. Então, $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$. \square

Propriedade 5

Uma função logarítmica $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.

Demonstração. Dados arbitrariamente dois números reais α e β é sempre possível achar dois números positivos x e y tais que $f(x) < \alpha$ e $f(y) > \beta$.

Torna-se um número natural n tão grande que $n > \frac{\beta}{f(2)}$. Como $f(2) > 0$ (propriedade 3), têm-se $n \cdot f(2) > \beta$ pela propriedade operatória III, $n \cdot f(2) = f(2^n)$. Portanto, $f(2^n) > \beta$.

Agora escolhendo $y = 2^n$, $f(y) > \beta$, o que mostra que a função é ilimitada superiormente.

Para provar que f é ilimitada inferiormente, basta lembrar que $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

Dado qualquer número real x , como foi provado acima, $f(y) > -\alpha$.

Fazendo $x = \frac{1}{y}$, isto é, $y = \frac{1}{x}$, tem-se:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) > -\alpha \Leftrightarrow -f(x) > -\alpha \Leftrightarrow f(x) < \alpha$$

□

Propriedade 6

Uma função logarítmica não está definida para $x = 0$.

Demonstração. Caso existisse $f(0)$, para $x \neq 0$, teríamos

$f(0) = f(x \cdot 0) = f(x) + f(0)$, então $f(x) = 0$. Assim a função seria identicamente

nula, o que contraria a propriedade A.

□

Propriedade 7

Dadas as funções logarítmicas $f, g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma constante $k > 0$, tal que $g(x) = k \cdot f(x)$, para todo $x > 0$.

A demonstração dessa propriedade se encontra em [4].

Propriedade 8

Toda função logarítmica f é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real k , existe sempre um único número real positivo x tal que $f(x) = k$.

Observação. Por ser uma demonstração muito longa e por não ser prioritária para o trabalho, não será apresentada.

Corolário

Toda função logarítmica $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre \mathbb{R}_+^* e \mathbb{R} .

Demonstração. *Qualquer função f dá origem a uma sequência de valores. Numa coluna à esquerda, põem-se os valores de x e na outra coluna à direita, os valores correspondentes de $f(x)$. Pela propriedade 1, x e $y > 0$ pertencem ao domínio de $f(x)$, logo, $f(x) \neq f(y)$ e pela propriedade 7, conclui-se que para todo elemento do domínio de $f(x)$ existe um único e diferente correspondente em \mathbb{R} . Logo, toda função logarítmica é uma bijeção de \mathbb{R}_+^* em \mathbb{R} . □*

1.4 Logaritmo Natural

Historicamente, primeiro o padre jesuíta belga Gregory Saint Vicent, em 1647, e depois Isaac Newton, em 1660, reconheceram a relação que existe entre a área de uma

faixa do gráfico de uma hipérbole com a definição geométrica dos logaritmos. Embora nenhum dos dois tenha identificado realmente essa área com o logaritmo natural, nem tenham reconhecido o número **e**, suas observações pioneiras mostram a concepção geométrica de uma função logarítmica.

Seja H o ramo positivo do gráfico de uma hipérbole representada pela função $y = \frac{1}{x}$ (veja a figura 1.1). H é um subconjunto do plano constituído pelos pontos da forma $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ e pode ser escrito por:

$$H = \left\{ (x, y) : x > 0, y = \frac{1}{x} \right\}$$

Geometricamente o ramo H da hipérbole é dado por:

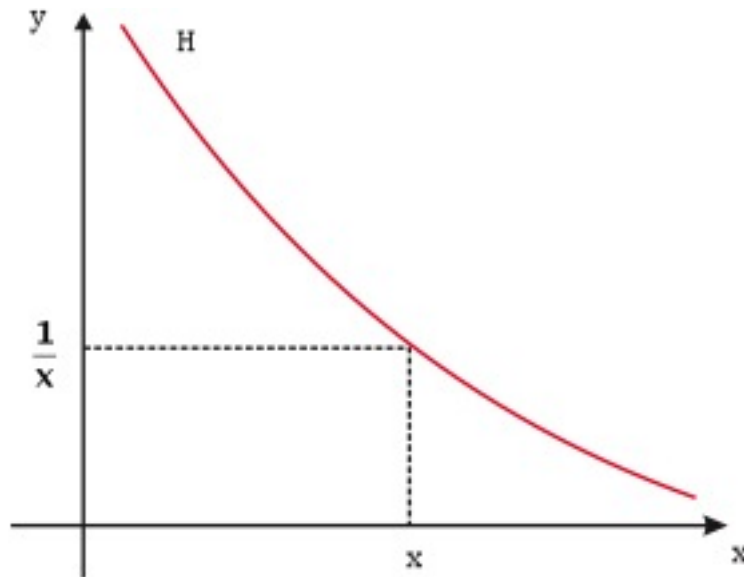


Figura 1.1: Ramo H da hipérbole.

Uma faixa de hipérbole é determinada fixando-se dos números reais positivos a, b com $a < b$ e tomando a região do plano limitada pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ pelo eixo das abcissas e pela hipérbole H .

Essa região é indicada pela notação H_a^b .

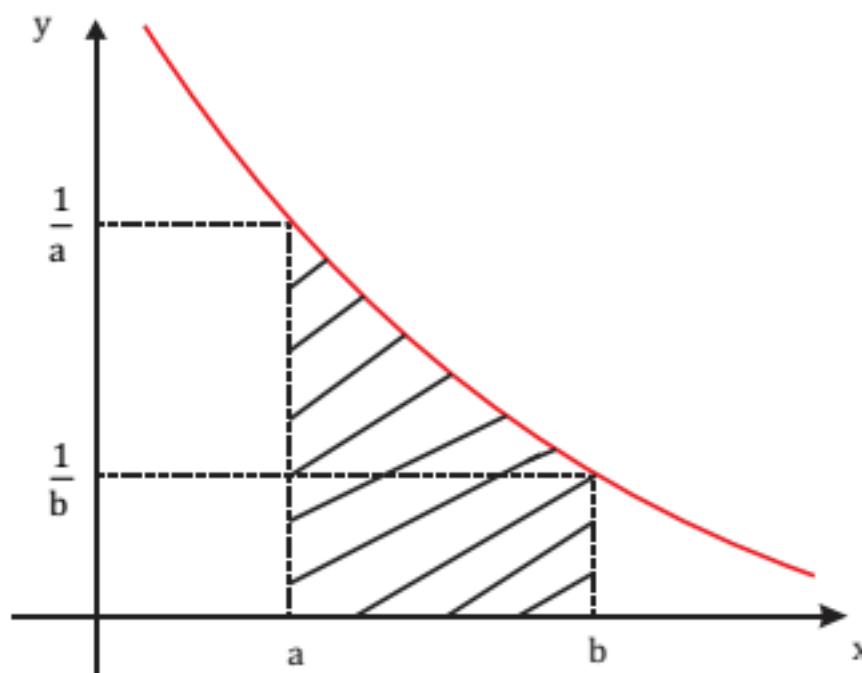


Figura 1.2: Faixa do ramo H positivo da hipérbole.

Do cálculo integral, ver [1], tem-se que a área de uma figura delimitada por uma função f , pelo eixo $0x$ e pela retas $x = a$ e $x = b$ é a integral definida de f no intervalo $[a, b]$.

A partir da definição de integral [1], define-se o logaritmo natural de um número real positivo x como sendo a área da faixa H_1^x , ou seja, $\ln x = \text{área de } H_1^x$.

Então, para $x > 1$

$$\text{Área } H_1^x = \int_1^x \frac{1}{x} dx,$$

ou seja,

$$\ln x = \log_e x = \int_1^x \frac{1}{x} dx. \quad (\text{Ver figura 1.3}).$$

Na notação para indicar o logaritmo natural de x , e é um número irracional, denominado número de Euler, em homenagem ao grande matemático suíço Leonhard Euler

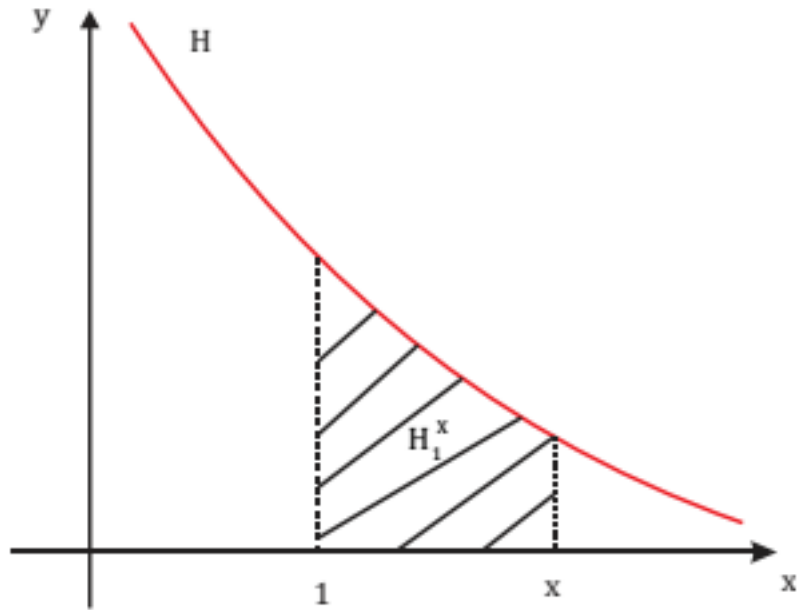


Figura 1.3: Área da faixa do ramo H positivo da hipérbole.

(1707 – 1783). Não é de interesse desse trabalho mas o número **e** pode ser calculado por:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$e \approx 2,718281828459$$

Caso o leitor tenha interesse, ver [1] e [6].

Para $0 < x < 1$, a área da faixa H_x^1 será o logaritmo natural de x com o sinal menos a frente

$$\text{Área } H_x^1 = \int_x^1 \frac{1}{x} dx = -\log_e(x) = -\ln(x). \quad (\text{Ver figura 1.4}).$$

Em particular; quando $x = 1$, H_1^1 se reduz a um segmento de reta, portanto tem

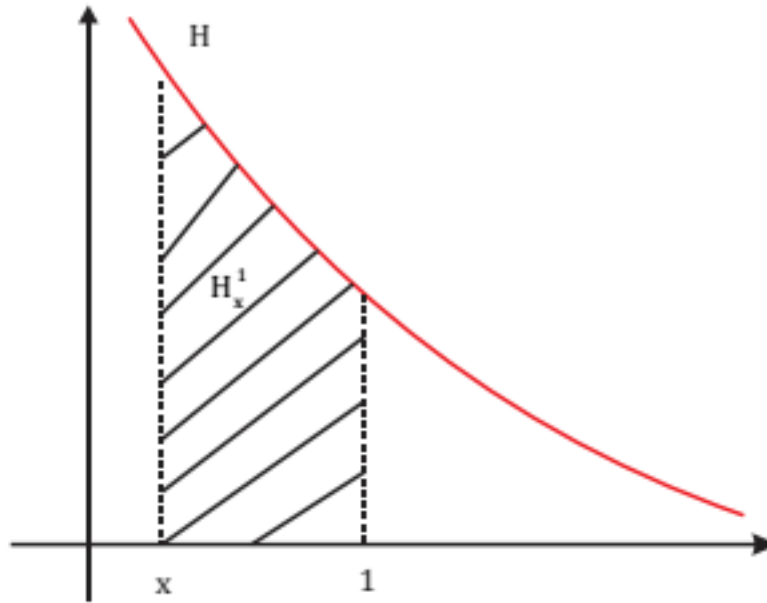


Figura 1.4: Área do segmento de reta da faixa do ramo H positivo da hipérbole.

área igual a zero. Pode-se escrever

$$\ln(1) = 0;$$

$$\ln(x) > 0 \quad \text{se} \quad x > 1;$$

$$\ln(x) < 0 \quad \text{se} \quad 0 < x < 1.$$

Não está definido $\ln(x)$ se $x \leq 0$.

O número e , base dos logaritmos naturais, pode ser caracterizado pelo fato de seu logaritmo natural ser igual a 1, ou seja, a área $H_1^e = 1$. Escreve-se:

$$\text{Área } H_1^e = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln(x)|_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

Observação: Pela definição do logaritmo, $\ln(e) = 1$. (Ver figura 1.5).

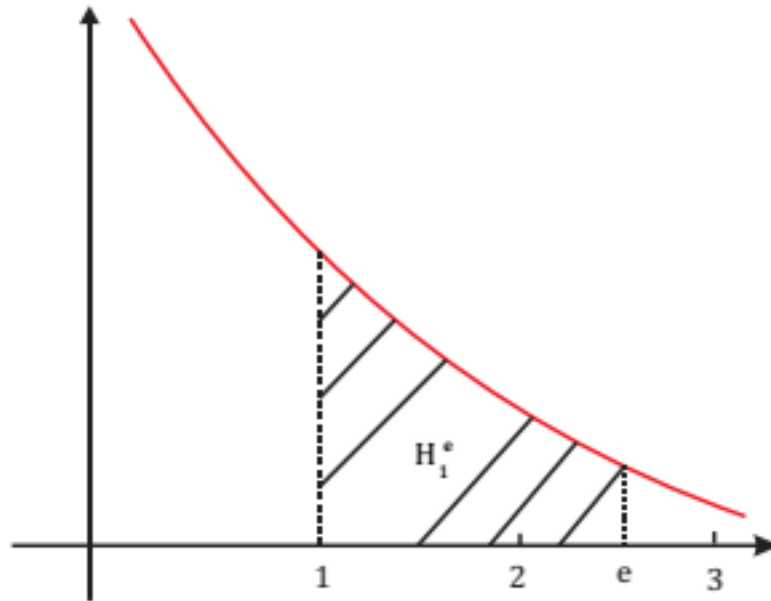


Figura 1.5: Área do logaritmo natural.

1.5 Função Exponencial

A partir da definição de função logarítmica é possível se definir uma função que é inversa da função logarítmica, ou seja,

$$f(x) = y = \log_a^x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Seja a número real positivo diferente de 1. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, com $f(x) = a^x$, é dita função exponencial de base a .

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, a função exponencial possui as seguintes propriedades:

I) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

Demonstração. $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$

Pela propriedade I percebe-se que f não pode assumir o valor zero (0), a menos que

seja identicamente nula.

Por absurdo, se existisse algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então, para todo $x \in \mathbb{R}$,
 $f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$, logo f seria identicamente nula. Então, se f não é uma função nula, não existe algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$.

Mas ainda, a função f é sempre positiva, $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, pois,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0$$

□

II) $f(1) = a$

Demonstração. Como $a^1 = a$, $f(1) = a$.

□

III) $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$, quando $a > 1$ e

$$x < y \Leftrightarrow a^x > a^y, \text{ quando } 0 < a < 1.$$

Demonstração. A propriedade diz que a função exponencial é crescente para $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Daí resultará que existe uma única maneira de definir o valor de $f(x) = a^x$ quando x é irracional. Supondo que $a > 1$, então a^x tem a seguinte propriedade,

$$r < x < s \quad \text{com} \quad r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r < a^x < a^s.$$

Não podem existir dois números reais diferentes, digamos $A < B$, para assumir o valor de a^x com a propriedade acima. Se existissem A e B , teríamos $r < x < s, r, s \in \mathbb{Q}$, então, $a^r < A < B < a^s$ e então o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, o que é um absurdo, veja [5].

Portanto, quando x é irracional, a^x é o único número real cujas aproximações por falta são as potências $a^r, r < x$ e cujas aproximações por excesso são as potências $a^s, x < s$. □

Em [1], a função a^x é definida por $a^x = e^{x \log a}$, para $1 \neq a > 0$.

IV) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$ é ilimitada superiormente.

Se $a > 1$, então a^x cresce, indefinidamente quando $x > 0$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = +\infty$. E se $0 < a < 1$, a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

V) A função exponencial é contínua.

Demonstração. Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseja, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0 , ou seja, $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$.

Mostremos primeiro que é possível tornar a^h tão próximo de 1 quanto desejamos, desde que $|h|$ seja escolhido suficientemente pequeno.

Suponhamos $a > 1$ e $h > 0$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, queremos mostrar que,

tomando h pequeno, teremos $a^h < 1 + \varepsilon$. Se tomamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$, teremos

$n\varepsilon > a - 1$ logo, $a < 1 + n\varepsilon$.

Pela desigualdade de Bernoulli, $(1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$, então $a < (1 + \varepsilon)^n$ e $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$.

Em resumo: dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Se tomarmos h tal que

$0 < h < \frac{1}{n}$, teremos $1 < a^h < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Assim faremos a^h tão próximo de 1 quanto

desejamos.

Agora fixado $x_0 \in \mathbb{R}$ e $h = x - x_0$, teremos $a^x - a^{x_0} = a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1)$.

Se x se aproximar de x_0 , h tende a zero, a^h tende a 1 e $a^h - 1$ tende a zero. Então

$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^x - a^{x_0}) = 0$, ou seja, $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$, o que caracteriza a continuidade da

função exponencial. □

VI) A função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é sobrejetiva.

Demonstração. Isto significa dizer que para todo número real $b > 0$ existe algum

$x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. Supondo $a > 1$, $n \in \mathbb{N}$, escolheremos uma potência a^{r_n} , com

$r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$ de modo que $|b - a^{r_n}| < \frac{1}{n}$, portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = b$.

Escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \dots < a^{r_n} < \dots < b$$

Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$, tal que $b < a^s$. Então a monotonicidade da

função a^x nos assegura que

$$r_1 < r_2 < \dots r_n < \dots < s.$$

Assim (r_n) é uma sequência crescente, limitada superiormente por s . Logo, os r_n são valores aproximados por falta de um número real x , tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$. A função exponencial sendo contínua, $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = b$, como queríamos demonstrar.

□

Conclui-se que para todo número real positivo a , diferente de 1, a função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, dada por $f(x) = a^x$ é uma correspondência biunívoca entre \mathbb{R} e \mathbb{R}_+^* , crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade de transformar somas em produtos, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$. Sua representação gráfica se encontra na figura (1.6).

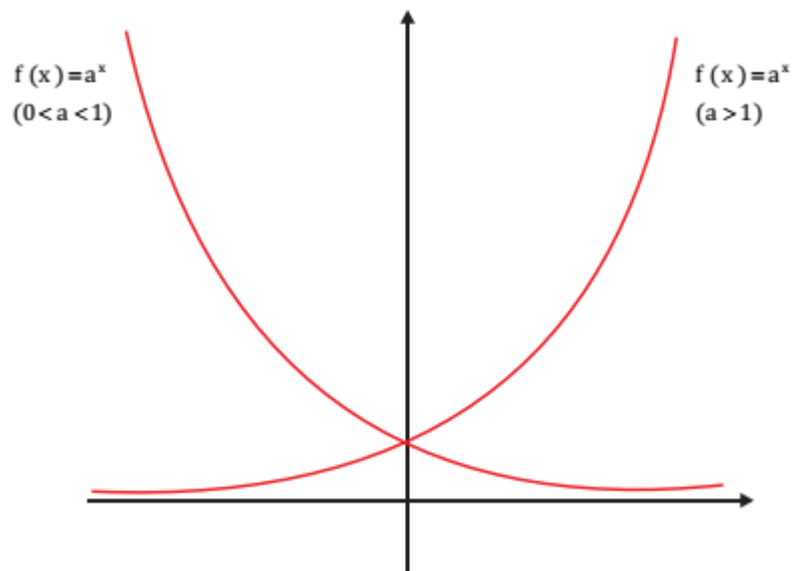


Figura 1.6: Gráfico da função exponencial.

A sua injetividade decorre da sua monotonicidade. Se $a > 1$, por exemplo, então $x > y \Rightarrow a^x > a^y$ e $x < y \Rightarrow a^x < a^y$, portanto $x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y$.

Observa-se da definição das funções logarítmicas $f(x) = \log_a^x$ e exponencial $f(x) = a^x$ e devido a bijetividade de ambas, que são funções inversas, pois, o domínio \mathbb{R}_+^* da função logarítmica é o conjunto imagem da exponencial e o domínio \mathbb{R} da exponencial é o conjunto imagem da logarítmica.

Graficamente, pode-se observar que os gráficos são simétricos em relação a reta bissetriz dos quadrantes ímpares. Ver figuras (1.7) e (1.8).

Os gráficos estão representados abaixo, nos dois casos:

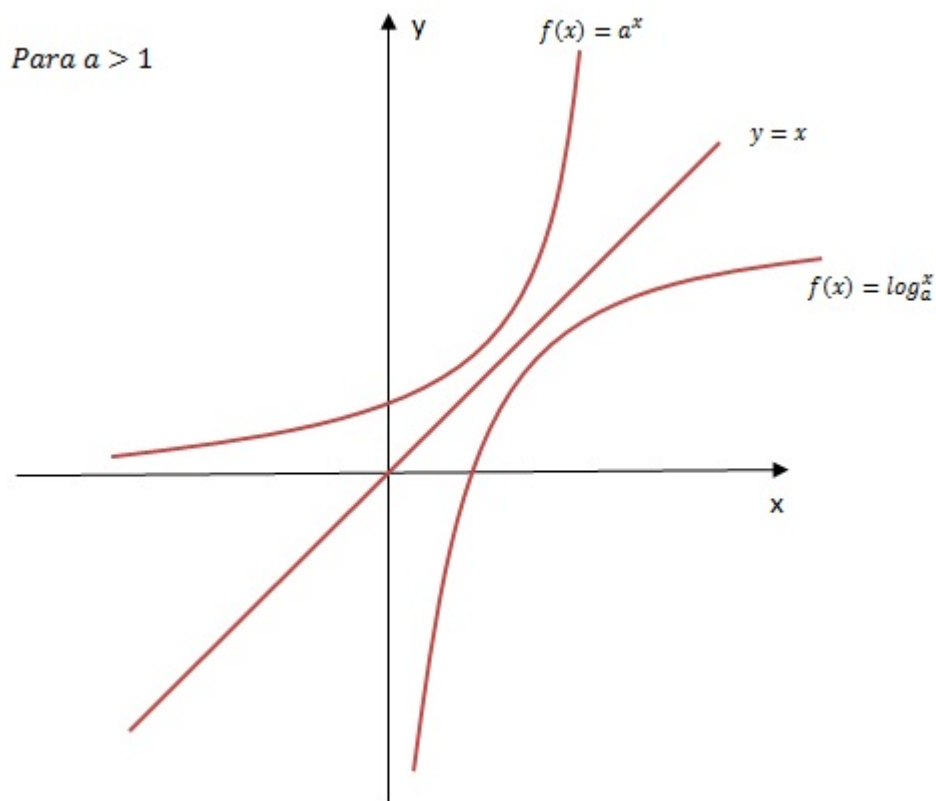


Figura 1.7: Gráficos das funções exponencial e logarítmica para base > 1 .

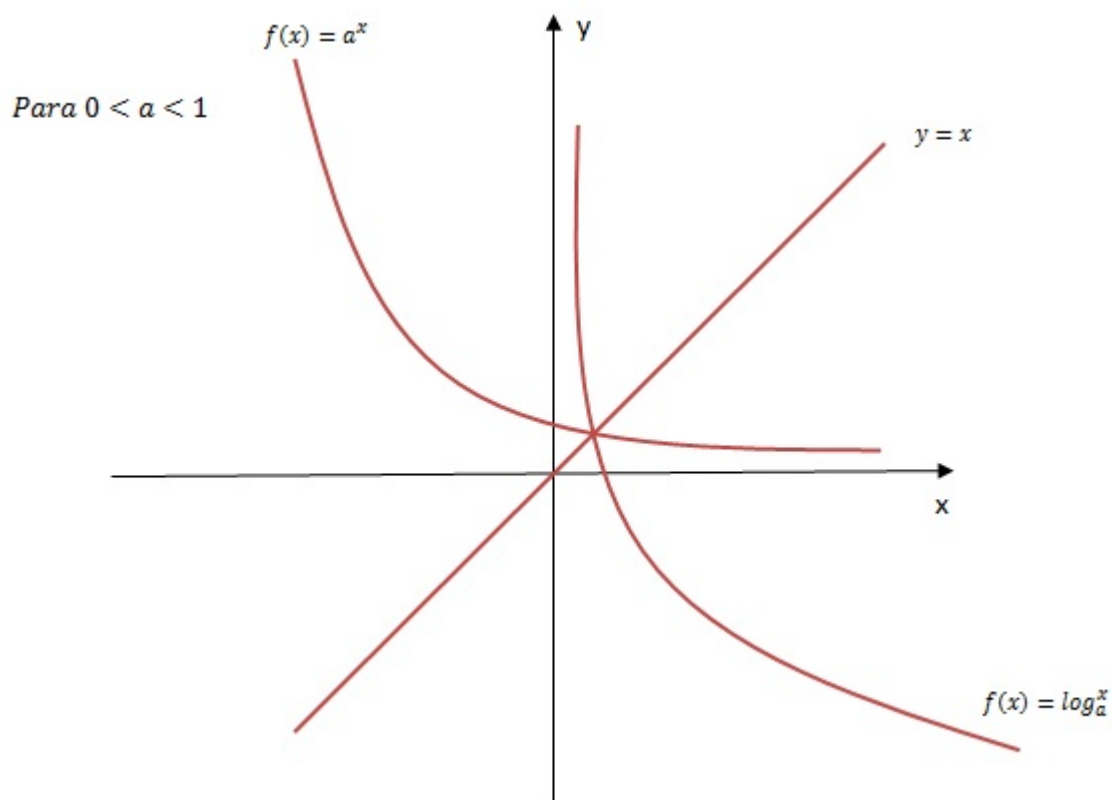


Figura 1.8: Gráficos das funções exponencial e logarítmica para $0 < \text{base} < 1$.

Capítulo 2

Leis de Crescimento e Decaimento

Exponencial

Muitas vezes uma quantidade física varia com o tempo e a magnitude dessa quantidade no instante t pode ser expressa por $q(t)$. Sua derivada $q'(t)$ é a taxa de variação de $q(t)$ em relação ao tempo. Em várias aplicações essa taxa é diretamente proporcional à magnitude da quantidade no tempo t , isto é,

$$q'(t) = k \cdot q(t), \quad (**)$$

em que k é uma constante real.

Em problemas aplicados costuma-se expressar a equação acima em termos de diferenciais. Assim, $q'(t) = \frac{dy}{dt}$ e $y = q(t)$. Logo, substituindo em (**)

$$\frac{dy}{dt} = ky \Leftrightarrow dy = kydt$$

Dividindo-se ambos os membros por y

$$\frac{1}{y}dy = kdt$$

Integrando-se ambos os membros,

$$\int \frac{1}{y}dy = \int kdt$$

e admitindo $y > 0$,

$$\ln y = kt + b$$

para alguma constante b . Segue que

$$y = e^{kt+b} = e^{kt} \cdot e^b.$$

Se y_0 denota o valor inicial de y , então para $t = 0$,

$$y_0 = e^0 \cdot e^b = e^b$$

e assim a solução $y = e^{kt} \cdot e^b$ pode ser escrita como

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Essa função é a lei de crescimento exponencial se $k > 0$ e é a lei de decaimento exponencial se $k < 0$. Tal função é o modelo matemático que mais se aproxima da realidade quando a situação expressa uma grandeza cuja taxa de crescimento (ou decréscimo) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente num dado momento.

A seguir serão apresentadas aplicações dessas leis.

2.1 Capitalização Contínua (Juros Compostos)

Um capital c_0 , empregado a uma taxa anual de $i\%$, renderá, ao final de um ano, juros no valor de $\frac{c_0 i}{100}$. Fazendo $\alpha = \frac{i}{100}$, decorrido um ano, o novo capital c será

$c = c_0 + \alpha c_0$, $c = c_0(1 + \alpha)$, ou seja, no final de um ano, o capital será o valor do ano anterior multiplicado pela constante $1 + \alpha$. O montante acumulado ao final de cada ano será:

$$\text{Primeiro ano: } M = c_0(1 + \alpha)$$

$$\text{Segundo ano: } M = c_0(1 + \alpha)(1 + \alpha) = c_0(1 + \alpha)^2$$

$$\text{Terceiro ano: } M = c_0(1 + \alpha)^2(1 + \alpha) = c_0(1 + \alpha)^3$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$t\text{-ésimo ano: } M(t) = c_0(1 + \alpha)^t$$

em que $\alpha = \frac{i}{100}$ e t devem se referir ao mesmo período de tempo. Por exemplo, se t é o número de anos, i deve ser a taxa anual; se t for o número de meses de uma aplicação financeira, i deve ser a taxa de juros mensal.

Se tomamos uma fração $\frac{1}{n}$ do ano, o capital c_0 , empregado à mesma taxa de juros, renderá $\frac{\alpha c_0}{n}$ de juros, de modo que, decorrida a fração $\frac{1}{n}$ do ano, o capital c se transforma em

$$c_1 = c_0 + \frac{\alpha c}{n} = c_0 \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)$$

Prosseguindo assim, se dividirmos o ano em n partes iguais e, depois de decorrido cada um desses períodos de $\frac{1}{n}$ do ano, capitalizarmos os juros rendidos, reinvestindo sucessivamente à mesma taxa, ao final de um ano, obteremos um capital maior, ou seja, $c_0 \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$.

Logo, parece que se dividirmos um ano em um número cada vez maior de intervalos de tempo, poderá se aumentar ilimitadamente o capital. Então, fazendo n tender a infinito,

$$c = c_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \quad (2.1.1)$$

Usando $\frac{\alpha}{n} = \frac{1}{x}$, se $n \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$ e substituindo em (2.1.1), tem-se:

$$c = c_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\alpha x} = c_0 \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^\alpha.$$

Como $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, o capital em um ano de aplicação será, $c = c_0 e^\alpha$.

O mesmo raciocínio é válido se considerarmos o capital c_0 aplicado durante t anos, à mesma taxa de $i\%$. Dividindo t anos em n partes iguais, resgatando e reinvestindo n vezes, ao final de t anos obteríamos $c_0 \left(1 + \frac{\alpha t}{n}\right)^n$. Fazendo n crescer indefinidamente,

$$\begin{aligned} M(t) &= c_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha t}{n}\right)^n, \\ M(t) &= c_0 \cdot e^{\alpha t} \end{aligned}$$

que é o montante da aplicação do capital c_0 , durante t anos, a uma taxa de $i\%$ ao ano, $\alpha = \frac{i}{100}$, de juros compostos acumulados continuamente.

A função $M(t)$ é representada pelo gráfico abaixo.

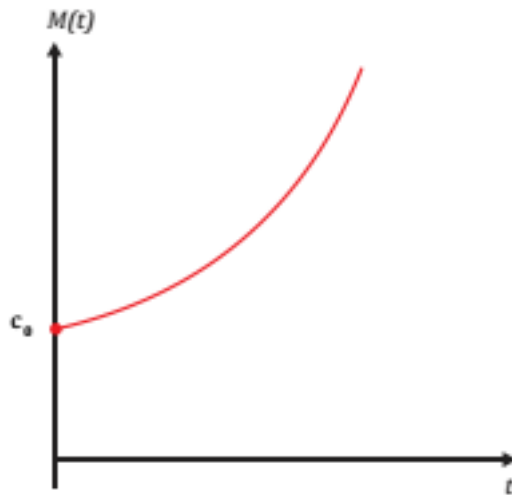


Figura 2.1: Montante para juros compostos.

Comparando-se os dois modelos de juros compostos apresentados, $M(t) = c_0(1+\alpha)^t$

e $M(t) = c_0 e^{at}$, o segundo modelo é aquele que mais se aproxima do que realmente aconteceria.

Por exemplo, tomando-se $c_0 = 1000$, $i = 1\%$ ao mês calcula-se o montante em um ano de aplicação.

Pelo primeiro modelo, o montante real será:

$$M(12) = 1000(1 + 0,01)^{12} \approx 1126,82$$

Pelo segundo modelo:

$$M(12) = 1000 \cdot e^{0,01 \cdot 12} = 1000 \cdot e^{0,12}$$

Usando $e \approx 2,71828$, $M(12) \approx 1127,49$.

Caso a capitalização seja feita diariamente, teremos:

$$M = 1000 \left(1 + \frac{0,01}{30} \right)^{12 \cdot 30} \approx 1127,47$$

Caso a capitalização seja feita por hora, teremos:

$$M = 1000 \left(1 + \frac{0,01}{30 \cdot 24} \right)^{12 \cdot 30 \cdot 24} \approx 1127,49$$

Quanto menor o intervalo de tempo da capitalização, ou seja, quanto mais próximo da continuidade, mais o modelo neperiano se aproxima do real.

2.2 Crescimento Populacional

O crescimento populacional sob condições ideais é outro fenômeno que exhibe um crescimento exponencial.

Quando dizemos que uma população cresce à taxa de $i\%$ ao ano, isto significa que ela aumenta, a cada ano, $\frac{i}{100} = \alpha$ do seu valor. Seja P_0 a população num certo momento. Ao final de t anos seu valor será

$$P(t) = P_0(1 + \alpha)^t.$$

Em geral, a população envolve um número muito grande de indivíduos, sejam os habitantes de uma cidade ou país ou as bactérias de uma certa colônia. Em vista disso, é razoável considerar a população $p(t)$ como uma função que varia continuamente com o tempo. Então, a variação da população ao longo do tempo é proporcional a própria população. Logo, usando-se o modelo neperiano para expressar tal população, obtemos $P(t) = P_0 e^{kt}$, em que k é a taxa de crescimento exponencial.

O gráfico abaixo representa a função $P(t)$.

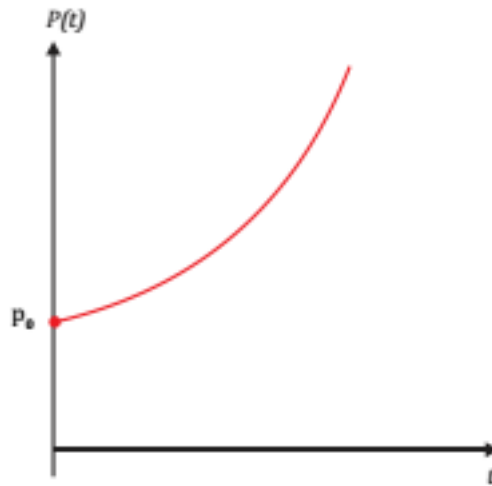


Figura 2.2: Gráfico da função $P(t)$.

2.3 Decaimento Radioativo

Os átomos de uma substância radioativa (rádio, urânio, plutônio, etc) possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância menos radioativa com o passar do tempo.

Isso acontece de tal maneira que num determinado instante, a quantidade de matéria que se desintegra é proporcional à massa da substância original presente no corpo naquele instante.

Cada substância radioativa tem sua constante de desintegração α que é determinada experimentalmente a partir da meia vida da substância, que é o tempo necessário para que metade da massa de um corpo formado por aquela substância, se desintegre.

Como a desintegração se processa continuamente ao longo do tempo, a massa $M(t)$ no instante t , é uma lei de decaimento exponencial, dada por

$$M(t) = M_0 e^{-\alpha t},$$

em que M_0 é a massa no momento inicial.

Para se calcular a meia vida, basta se considerar $M(t) = \frac{M_0}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}\frac{M_0}{2} &= M_0 e^{-\alpha t_0} \\ \frac{1}{2} &= e^{-\alpha t_0} \\ \ln \frac{1}{2} &= \ln e^{-\alpha t_0} \\ -\ln 2 &= -\alpha t_0 \\ t_0 &= \frac{\ln 2}{\alpha}\end{aligned}$$

em que t_0 é a meia vida de uma substância cuja taxa de desintegração é α .

A função $M(t)$ é representada pelo gráfico da figura (2.3).

Uma técnica usada para determinar a idade de fósseis ou artefatos antigos é a “Datação por carbono” (Método do Carbono 14).

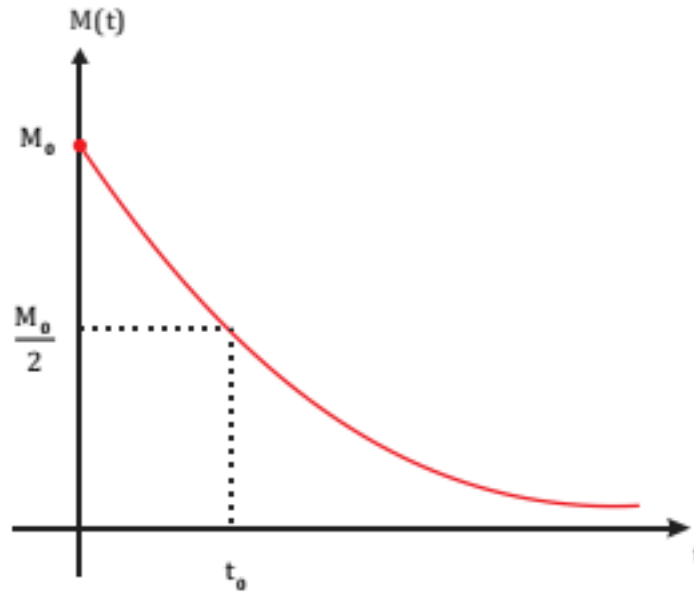


Figura 2.3: Gráfico do decaimento radioativo.

O dióxido de carbono, CO_2 , existente no ar, contém além do isótopo estável (^{12}C), o isótopo radioativo (^{14}C). As plantas absorvem o dióxido de carbono do ar, o que significa que a razão entre as massas de ^{14}C e ^{12}C em uma planta viva (ou em um animal que se alimente dessa planta) é o mesmo que no ar. Quando uma planta ou animal morre deixa de absorver CO_2 , a massa de ^{12}C continua a mesma após a morte, mas a massa do carbono-14 diminui exponencialmente devido ao decaimento radioativo, o que faz com que a razão entre as massas de ^{14}C e ^{12}C também diminua exponencialmente.

É razoável supor que a razão R_0 entre as massas de ^{14}C e ^{12}C na atmosfera se manteve praticamente constante nos últimos milhares de anos, logo, a razão entre as massas de ^{14}C e ^{12}C em uma amostra de um fóssil ou de um artefato, é dada por $R(t) = R_0 e^{-kt}$. Como a meia vida do carbono ^{14}C é de 5570 anos, comparando-se $R(t)$ com R_0 é possível estimar a idade da amostra.

Exemplo. *Num castelo inglês existe uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmavam ser a famosa Távola Redonda do Rei Arthur, que viveu no século V. Por meio de um contador Geiger (instrumento que mede radioatividade), constatou-se que a massa de ^{14}C existente hoje na mesa é 0,894 vezes a massa de ^{14}C , M_0 , que existe num pedaço de madeira viva com o mesmo peso da mesa, logo, M_0 é também a massa de carbono ^{14}C que existia na mesa quando ela foi feita há t anos. Ou seja, $\frac{M}{M_0} = 0,894$ e calculando-se a taxa de desintegração α do ^{14}C ,*

$$\alpha = \frac{\ln 2}{5570} = 0,0001244$$

$$\text{Usando } M = M_0 e^{-\alpha t}, \text{ obtemos que } t = -\frac{\ln(0,894)}{0,0001244} = 901 \text{ anos.}$$

Se a mesa fosse mesmo a Távola Redonda, deveria ter mais de 1500 anos.

2.4 Resfriamento de um corpo

A lei de resfriamento de Newton afirma que, a diferença de temperatura, $T_0 - t_0$, entre um objeto e o meio ambiente que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença. Logo, é uma lei de decaimento exponencial, análoga a lei da desintegração radioativa, que pode se expressar por

$$T(t) = t_0 + (T_0 - t_0)e^{-kt}$$

em que t_0 é a temperatura ambiente, T_0 é a temperatura do objeto no momento em que foi colocado no ambiente, k é uma constante, que depende do material que constitui o

objeto e $T(t)$ é a temperatura do objeto no instante t .

Observa-se que depois de muito tempo que o objeto foi colocado nesse ambiente, sua temperatura tende a se igualar com a temperatura do ambiente, t_0 . Ou seja,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} [t_0 + (T_0 - t_0)e^{-kt}] \\ \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[t_0 + \frac{T_0 - t_0}{e^{kt}} \right]\end{aligned}$$

Como $e^{kt} \rightarrow \infty$, $\frac{T_0 - t_0}{e^{kt}} \rightarrow 0$, logo, $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = t_0$.

O gráfico da figura (2.4) representa a função $T(t)$.

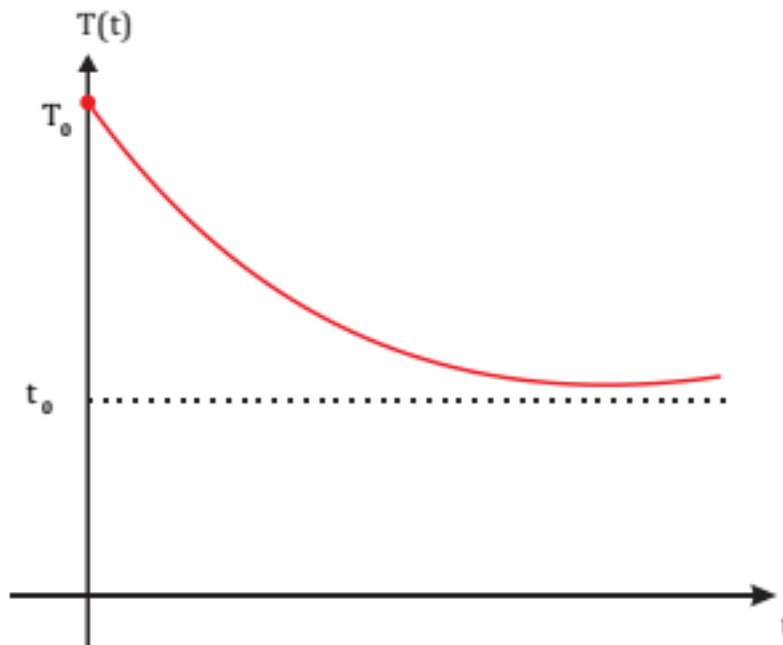


Figura 2.4: Gráfico do resfriamento de um corpo.

Exemplificando o modelo matemático de resfriamento de um corpo, suponha que uma xícara de café, inicialmente a $60^\circ C$, seja colocada num ambiente de temperatura $20^\circ C$. Vinte minutos depois, a temperatura do café passa a ser de $30^\circ C$. Deseja-se calcular a temperatura do café 50 minutos após o café ser servido.

Utilizando-se a função $T(t) = t_0 + (T_0 - t_0)e^{-kt}$ e substituindo-se as informações:

$$T(t) = 20 + 40 \cdot e^{-kt}$$

$$T(20) = 20 + 40 \cdot e^{-20k} = 30.$$

Logo,

$$e^{-20k} = \frac{1}{4} \therefore e^{-10k} = \frac{1}{2}.$$

Calculando $T(50)$:

$$\begin{aligned} T(50) &= 20 + 40 \cdot e^{-50} \\ &= 20 + 40(e^{-10k})^5 \\ &= 20 + 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ T(50) &= 21,25^\circ C. \end{aligned}$$

A tendência é que para tempos maiores que 50 minutos a temperatura do café se aproxime da temperatura ambiente de 20°C .

$$T(60) \approx 20,62$$

$$T(80) \approx 20,15$$

$$T(100) \approx 20,03.$$

2.5 Circuito Elétrico

Ao aplicar certa tensão elétrica E num elemento condutor de eletricidade (ver figura 2.5), produz-se uma corrente elétrica de intensidade I . Essa intensidade I não atinge

um valor fixo imediatamente. Todo circuito tem um certo coeficiente de auto indutância L , assim, se aplicarmos ao circuito uma força eletromotriz E , ele reagirá com uma força contra – eletromotriz de intensidade $L\frac{dI}{dt}$, de modo que a força eletromotriz resultante será $F(t) = E - L\frac{dI}{dt}$.

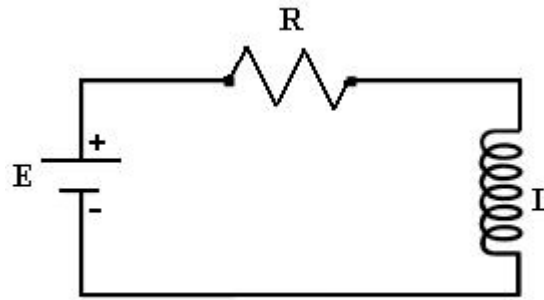


Figura 2.5: Circuito elétrico.

Pela Lei de Ohm, tem-se

$$F = RI \Leftrightarrow RI = E - L\frac{dI}{dt}$$

em que R é a resistência do circuito.

$$RI = E - L\frac{dI}{dt}$$

$$L\frac{dI}{dt} = E - RI$$

$$LdI + (RI - E)dt = 0$$

Fazendo $dI = dx \Leftrightarrow x = I$ e $dt = dy \Leftrightarrow y = t$, temos

$$Ldx + (Rx - E)dy = 0$$

Sendo

$$L = M = P_x \quad e \quad R_x - E = N = P_y$$

$$\left. \begin{array}{l} M_y = 0 \\ N_x = R \end{array} \right\} \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{R}{L} = P_y = 0, \lambda = e^{\int \frac{R}{L} dy} = e^{\frac{R}{L} y}$$

$$Le^{\frac{R}{L} y} dx + e^{\frac{R}{L} y} (Rx - E) dy = 0$$

$$M_y = L \cdot e^{\frac{R}{L} y} \cdot \frac{R}{L}$$

$$N_x = R \cdot e^{\frac{R}{L} y}$$

$$\phi = \int L e^{\frac{R}{L} y} dx = L x e^{\frac{R}{L} y} + g(y)$$

$$\phi_y = L x e^{\frac{R}{L} y} \cdot \frac{R}{L} + g'(y) = R x e^{\frac{R}{L} y} - E e^{\frac{R}{L} y} \Rightarrow$$

$$g'(y) = -E e^{\frac{R}{L} y}$$

$$g(y) = \int -E e^{\frac{R}{L} y} dy = -E e^{\frac{R}{L} y} \cdot \frac{L}{R}$$

$$f = L x e^{\frac{R}{L} y} - \frac{EL}{R} e^{\frac{R}{L} y} = k$$

$$L x e^{\frac{R}{L} y} = k + \frac{EL}{R} e^{\frac{R}{L} y}$$

$$L x e^{\frac{R}{L} y} = k + \frac{EL}{R} e^{\frac{R}{L} y}$$

$$-\frac{EL}{R} e^0 = k \Leftrightarrow k = -\frac{EL}{R}$$

$$L I e^{\frac{R}{L} t} = \frac{EL}{R} e^{\frac{R}{L} t} - \frac{EL}{R} = \frac{E}{R} \left(e^{\frac{R}{L} t} - 1 \right)$$

$$I = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

Resolvendo a equação diferencial acima e sabendo-se que $I(0) = 0$, obtém-se

$$I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

que é a função que descreve a intensidade da corrente ao longo do tempo enquanto o circuito esta ligado.

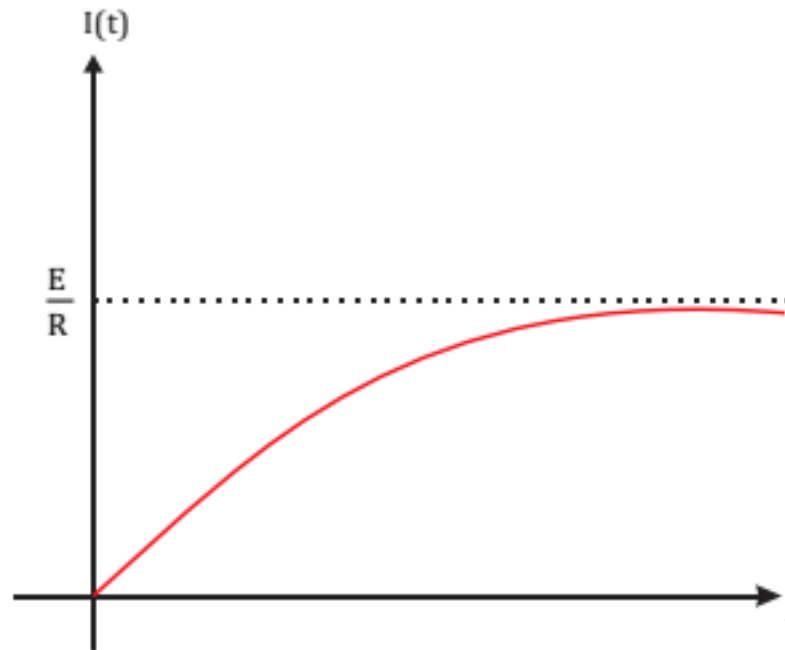


Figura 2.6: Gráfico da intensidade da corrente elétrica.

A função $I(t)$ está representada graficamente na figura (2.6).

Em particular, num circuito em que $E = 10$, $L = 10$ e $R = 2\Omega$, após 10 segundos de ligado, a intensidade da corrente será

$$\begin{aligned} I &= \frac{10}{2} \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot 10}) \\ I &= 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^2}\right). Usando \quad e \approx 2,7. \\ I &= 4,31A. \end{aligned}$$

2.6 Intensidade Luminosa

As plantas aquáticas são encontradas a até alguns metros de profundidade da superfície de lagos e oceanos. Isso é explicado pelo fato da intensidade de luz I diminuir

exponencialmente com a profundidade x .

Segundo a lei de Bouger – Lambert, constatou-se que a taxa de variação da intensidade luminosa à determinada profundidade x , isto é $\frac{dI}{dx}$, é proporcional a própria intensidade luminosa.

Logo, obtém-se a função $I(x) = I_0 e^{-kx}$, em que k é o coeficiente de absorção da água, que depende do comprimento de onda da luz e da densidade da água.

O gráfico de $I(x)$ está representado abaixo

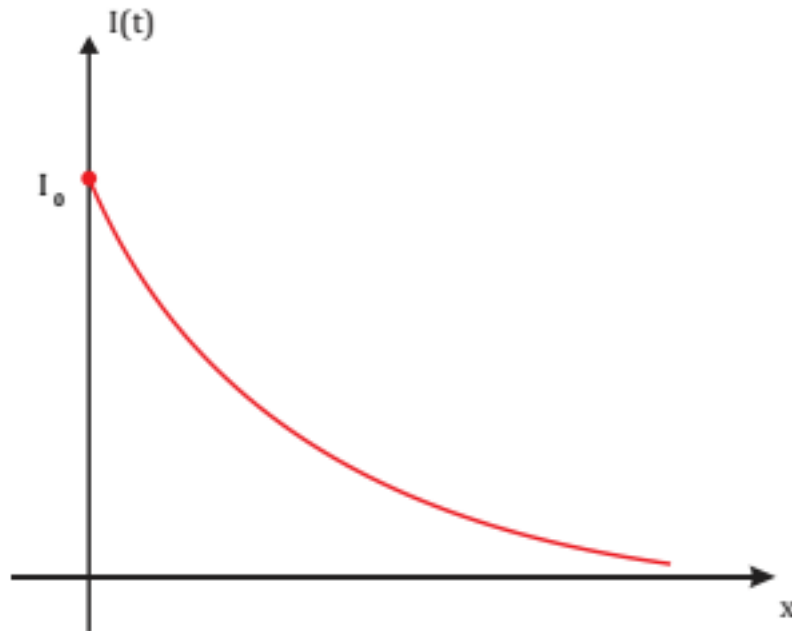


Figura 2.7: Gráfico da intensidade luminosa $I(x)$.

2.7 Curva de Aprendizagem

É possível se obter uma relação entre a eficiência com o qual um indivíduo realiza uma tarefa e o tempo de treinamento ou experiência na atividade considerada.

Por exemplo, a produtividade de um operário na linha de montagem de uma fábrica, cresce rapidamente nos primeiros treinamentos. Mas a taxa de crescimento dessa produtividade diminui com o tempo e o nível de produtividade do funcionário aproxima-se de um certo nível fixo devido às limitações do trabalhador e da máquina.

Devido a essa característica, o gráfico da função $Q(t) = B - Ae^{-kt}$ é chamado **curva de aprendizagem**. Na função A , B e k são constantes positivas e $Q(t)$ é o nível de aprendizado no instante t .

Para traçar o gráfico, observe que

$$Q(0) = B - A$$

$$Q'(t) = kAe^{-kt}$$

Como A e k são constantes positiva, $Q'(t) > 0$ para todo valor de t . Portanto, $Q(t)$ é uma função crescente de t .

Observa-se também que:

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (B - Ae^{-kt}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} B - \lim_{t \rightarrow \infty} Ae^{-kt} \\ &= B \end{aligned}$$

e assim $Q(t) = B$ é uma assíntota horizontal da função. Isto é, a medida que t cresce ilimitadamente o valor de $Q(t)$ cresce e se aproxima do número B .

Restringindo-se o domínio da função ao intervalo $[0, \infty)$, o gráfico de $Q(t)$ é representado na figura (2.8).

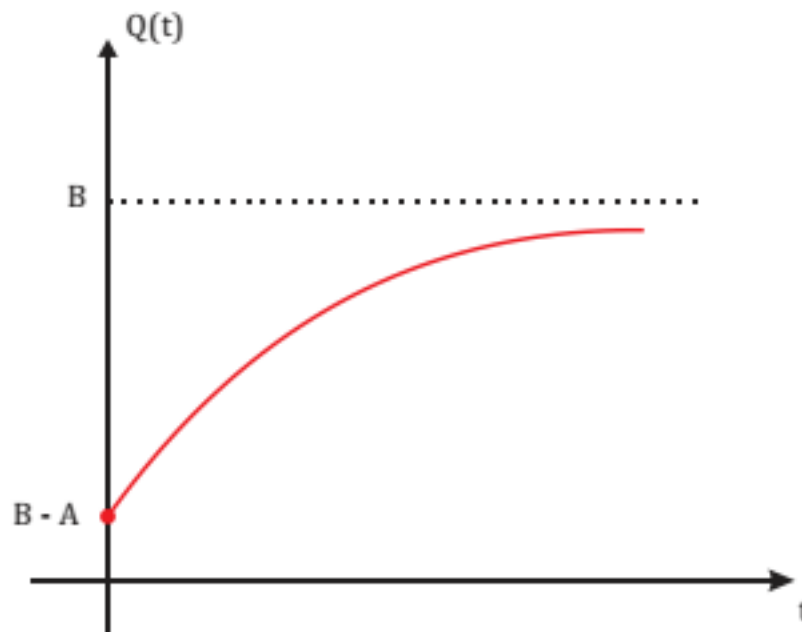


Figura 2.8: Gráfico da função $Q(t) = B - Ae^{-kt}$.

2.8 Logística de Crescimento

O gráfico da função $Q(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-kt}}$, em que A , B e k são constantes positivas é chamado **curva logística (ou sigmoidal)**.

Observa-se pela função que para pequenos valores de x , a curva cresce rapidamente mas, para valores grandes de x , passa a crescer mais lentamente, aproximadamente de uma assíntota horizontal, como a curva de aprendizado. Essa assíntota representa um “nível de saturação” da grandeza representada e é chamada de **capacidade de suporte** da grandeza.

Assim, por exemplo nos modelos de população a capacidade de suporte é o número máximo de indivíduos que o ambiente pode suportar. A população se estabilizaria num nível compatível com o que o ambiente é capaz de oferecer para sobrevivência dessa

população. Modelos que descrevem a propagação de boatos e epidemias são outros exemplos da aplicação da curva logística.

A seguir serão calculados alguns elementos usados na construção do gráfico da função $Q(t)$.

$$\begin{aligned} Q(0) &= \frac{B}{1 + Ae^0} = \frac{B}{1 + A} \\ Q'(t) &= \frac{-A \cdot e^{-kt} \cdot (-k) \cdot B}{(1 + Ae^{-kt})^2} = \frac{ABke^{-kt}}{(1 + Ae^{-kt})^2} \end{aligned}$$

Como $Q'(t) > 0$ para qualquer valor de t , a função é monotonicamente crescente.

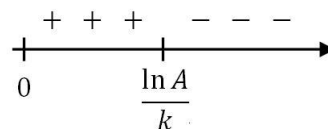
Verificando-se se há um ponto de inflexão:

$$Q''(t) = \frac{ABk^2 e^{-kt} (Ae^{-kt} - 1)}{(1 + Ae^{-kt})^3}$$

igualando-se $Q''(t) = 0$, obtém-se apenas uma raiz:

$$\begin{aligned} Ae^{-kt} - 1 &= 0 \\ e^{-kt} &= \frac{1}{A} \\ \ln e^{-kt} &= \ln \left(\frac{1}{A} \right) \\ -kt &= -\ln A \\ t &= \frac{\ln A}{k} \end{aligned}$$

Sinal de $Q''(t)$



Então para $t = \frac{\ln A}{k}$, há um ponto de inflexão (de “para cima” para “para baixo”).

Não há assíntotas verticais, pois, $Q(t)$ existe para qualquer valor de $t \geq 0$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{B}{1 + A \cdot 0} = B$$

Logo, a reta $y = B$ é uma assíntota horizontal. O gráfico está representado na figura (2.9).

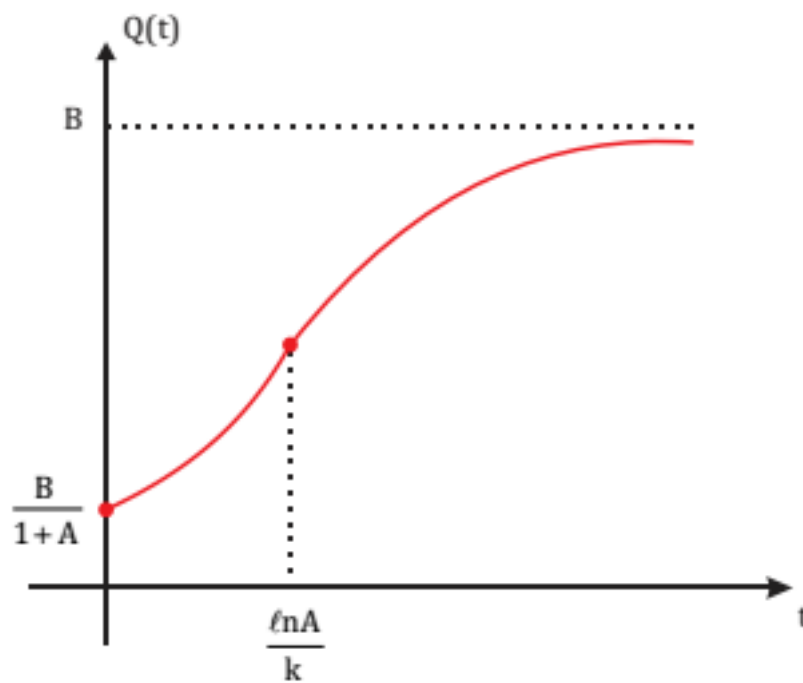


Figura 2.9: Gráfico da logística de crescimento.

Capítulo 3

Aplicações da Função Logarítmica

3.1 Altitude de uma localidade

A pressão atmosférica a uma altura h , em relação ao nível do mar, é o peso de uma coluna vertical de ar cuja base é horizontal, tem altura h e área igual a 1.

Prova-se, segundo a Lei de Boyle, que a pressão a uma altitude h é dada por $p(h) = p_0 e^{-\alpha h}$, em que p_0 é a pressão atmosférica ao nível do mar e α é uma constante.

A partir do cálculo da pressão atmosférica p , usando-se um barômetro, é possível se determinar a altura h .

Tem-se:

$$\begin{aligned}
 p &= p_0 e^{-\alpha h} \Leftrightarrow \frac{p}{p_0} = e^{-\alpha h} \Leftrightarrow \\
 \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) &= \ln e^{-\alpha h} \Leftrightarrow \\
 \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) &= -\alpha h \Leftrightarrow \\
 h &= -\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \Leftrightarrow \\
 h(p) &= \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{p_0}{p} \right)
 \end{aligned}$$

A função $h(p)$ apresenta domínio $(0, p_0]$ e conjunto imagem $[0, +\infty)$. Seu gráfico está representado abaixo.

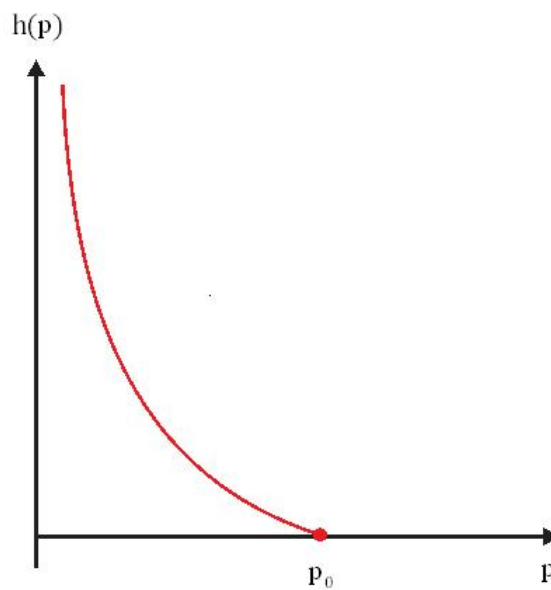


Figura 3.1: Função pressão atmosférica.

3.2 Sismologia

A primeira escala utilizada para quantificar o nível de energia liberada por um sismo, foi desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Richter e Beno Gutenberg. Tal escala ficou conhecida como **Escala de Magnitude Local ou Escala Richter**.

Como a energia liberada (E) por um terremoto é um número muito grande, utilizou-se uma escala logarítmica de base 10 e o terremoto é quantificado por um único número, chamado magnitude.

A magnitude na Escala Richter é dada por

$$M = \frac{2}{3} \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

em que E_0 é uma energia liberada por um pequeno terremoto e é usado o valor $E_0 = 10^{4,4} J$ como referência.

O gráfico dessa função é apresentado abaixo.

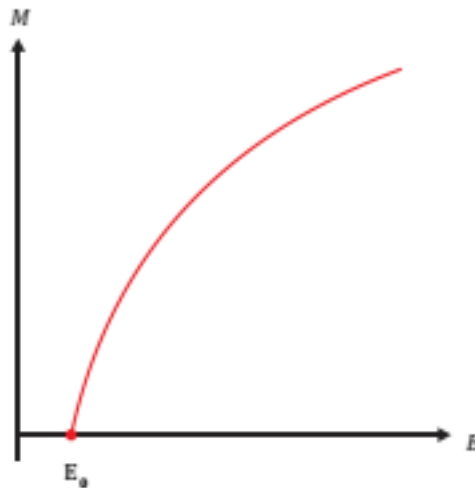


Figura 3.2: Magnitude na escala Richter.

Hoje em dia se utiliza uma outra escala, também logarítmica de base 10, porém mais precisa que a escala de Richter. É a **Escala de Magnitude de Momento (MMS)**

que leva em conta a área de ruptura da falha geológica onde ocorrem o terremoto e o deslocamento médio dessa área.

O símbolo da escala de magnitude do momento é M_w , em que w significa o trabalho mecânico realizado. M_w é um número adimensional definido por

$$M_w = \frac{2}{3} \log(M_0) - 10,7$$

em que M_0 é o momento sísmico.

O gráfico de M_w é apresentado abaixo

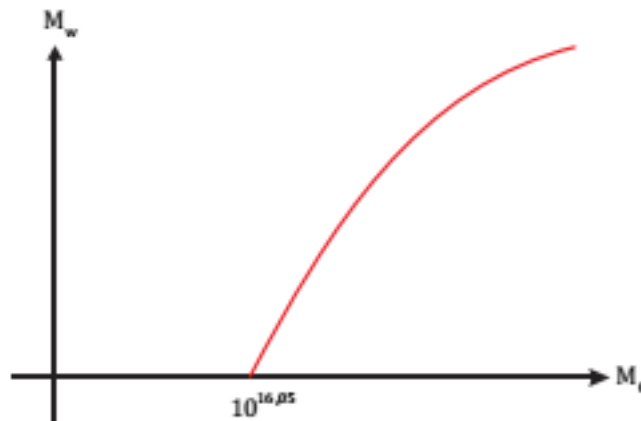


Figura 3.3: Escala de Magnitude de momento.

3.3 Nível de Intensidade Sonora

A altura de um som, experimentada pelo ouvido humano, baseia-se no nível de intensidade.

O nível de intensidade sonora, N , medido em decibéis (dB), em homenagem a Alexander Graham Bell, é definido em escala logarítmica pelo fato de que o ser humano

possui a peculiaridade de que sua sensibilidade varia linearmente enquanto que o estímulo respectivo varia exponencialmente. O nível de intensidade sonora N é dado por:

$$N = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

em que I e I_0 são intensidades sonoras, em w/m^2 , que queremos comparar. Normalmente escolhe-se $I_0 = 10^{-12} w/m^2$ que é a intensidade sonora mais baixa da faixa audível para um ser humano.

O gráfico da função $N(I)$ é dado abaixo

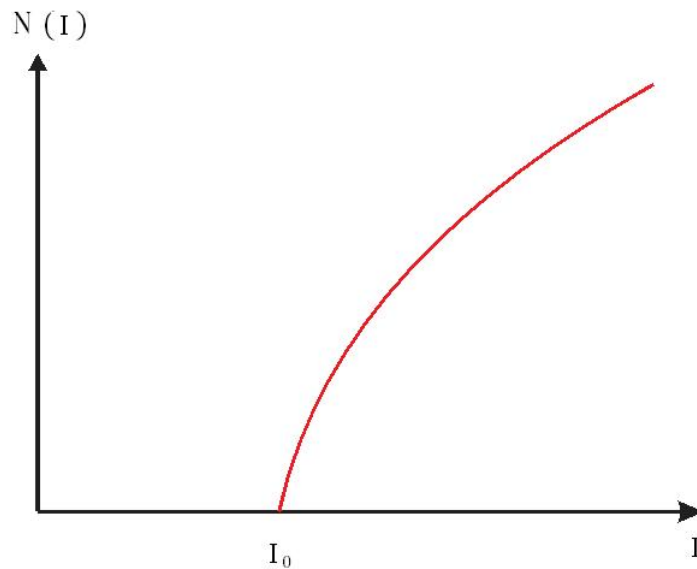


Figura 3.4: Função da intensidade sonora.

3.4 Cálculo do pH

Os químicos usam um número denotado por **pH** (**potencial hidrogênioônico**) para descrever quantitativamente a acidez, neutralidade ou basicidade de uma solução

aquosa.

O termo pH foi introduzido em 1909, pelo bioquímico Peter Lauritz Sorensen (1868 – 1939) com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle da qualidade de cervejas.

Por definição, $pH = -\log[H^+]$, em que $[H^+]$ é a concentração dos íons hidrogênio, em mols por litro, na solução.

Se o pH é menor que 7 indica que a solução é ácida. Quanto mais próximo de zero, mais ácida é a solução.

Se o $pH = 7$, a solução é neutra.

Se o pH é maior que 7, indica a alcalinidade da solução. Quanto mais distante de 7, mais básica é a solução.

A tabela abaixo informa o pH de algumas substâncias.

Substância	pH
Vinagre	2
Refrigerante tipo cola	2,5
Sumo da laranja	3,5
Cerveja	4,5
Café	5
Leite	6,5
Água pura	7,0
Sangue	7,4
Água do mar	8,0
Sabonete	9 a 10
Soda Cáustica cola	13,5

A função pH possui domínio $(0, 1)$, conjunto imagem $(0, +\infty)$ e o gráfico está representado abaixo.

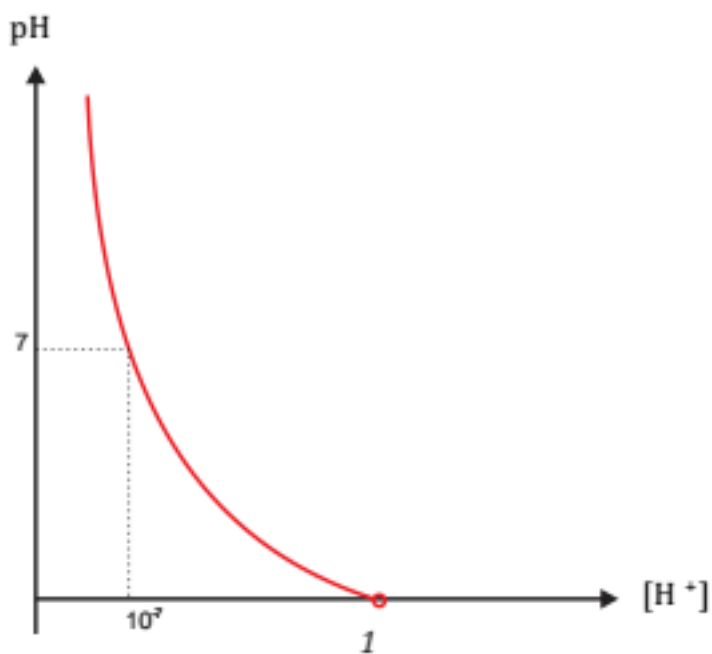


Figura 3.5: Função pH .

Capítulo 4

Sugestão de Aula

Para que os alunos conheçam as aplicações das funções exponenciais e logarítmicas, despertando assim a curiosidade de saber em que situações tais funções possam ser empregadas, sugiro que o professor após apresentar o logaritmo com suas propriedades operatórias, explicar a função logarítmica e a função exponencial, com seus respectivos gráficos, possa fazer a seguinte aula: que os alunos, em sala de aula, pesquisem sobre essas funções apresentando cada um deles, pelo menos, três aplicações delas nas diversas áreas do conhecimento. Tal pesquisa pode ser feita em livros, enciclopédias, pela internet, ou outro meio. Após apresentar essas aplicações, cada aluno irá propor um exemplo de cada uma delas e resolverá esses exercícios, entregando em seguida ao professor. Na aula seguinte o professor irá resolver no quadro, apresentando para toda a turma, alguns dos melhores exercícios propostos pelos alunos, discutindo cada um deles, e mostrando os gráficos das funções.

Dessa forma cada aluno poderá vislumbrar a importância dessas funções e a partir dos problemas propostos conhecer seus modelos matemáticos e seus gráficos, tendo

uma noção do comportamento dessas funções.

Capítulo 5

Considerações Finais

No decorrer da evolução humana, devido às necessidades momentâneas ou para dar “asas” a sua criatividade e genialidade, o homem procurou desenvolver ferramentas matemáticas que propiciassem novos conhecimentos ou que saciassem tais necessidades. Foi assim com a criação das tábuas de logaritmos, que propiciou um avanço extraordinário nos estudos sobre astronomia no século XVI e simplificou os cálculos aritméticos nos três séculos seguintes.

Com a necessidade do homem tentar prever a relação que existe entre duas ou mais grandezas, pôde-se modelar tal relação por uma fórmula matemática que expressasse, de forma precisa ou próxima disso, essa relação, podendo o homem tomar a melhor decisão em cada caso.

Com o auxílio das funções logarítmicas e exponenciais, foi possível modelar ou dimensionar vários fenômenos que até então não eram de domínio do conhecimento humano. Tal capacidade de tentar entender ou explicar esses fenômenos faz com que o homem torne a sua existência mais adequada, melhorando sua relação com o meio

ambiente em que vive.

Fenômenos físicos como: o resfriamento de um corpo, a intensidade da corrente elétrica num circuito, a variação da intensidade luminosa, o cálculo da altitude em função da pressão atmosférica e o cálculo do nível da intensidade sonora; químicos, como o decaimento da massa de materiais radioativos e o cálculo do pH das substâncias; biológicos, como a previsão do crescimento de populações; econômicos, como o cálculo de juros contínuos, a modelagem de situações de aprendizagem e logística; e geográficos, como, por exemplo, a quantificação de abalos sísmicos, já não são mais um mistério para o homem, pois, com o auxílio das funções estudadas, pode-se prever com certa precisão cada um desses fenômenos.

Toda ferramenta matemática apresentada nesse trabalho continuará sendo usada por novas gerações de cientistas para descrever fenômenos que ainda não são de domínio humano ou fenômenos que não foram descobertos. Tudo isso, com o objetivo de melhorar a qualidade de vida da Humanidade.

Referências Bibliográficas

- [1] **ÁVILA**, GERALDO, *Cálculo 1 - Funções de uma variável*, Livros técnicos e científicos Editora S.A., 1991.
- [2] **BOYLER**, Carl B., *História da Matemática* , São Paulo, 1991.
- [3] **HOFFMANN**, LAURENCE D. E **BRADLEY**, GERALD L., TRAD. RONALDO SÉRGIO DE BIASI, *Cálculo um curso moderno e suas aplicações*, 10º edição. Editora LTC, São Paulo, 2010.
- [4] **LIMA**, ELTON LAGES , *Logaritmos* ,Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1991.
- [5] **LIMA**, ELTON LAGES , *Números e Funções reais* ,Coleção do PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro, 2013. 1º edição.
- [6] **SWOKOWSKI**, EARL W. TRAD ALFREDO ALVES DE FARIAS, *Cálculo com geometria analítica* , EVolume 1 Editora Makron books, 1995.
- [7] **TAN**, S. T., TRAD EDSON DE FARIA, *Matemática Aplicada à administração e economia*, Ed. Pioneira – Thowson Learning, 2001.
- [8] Em <http://wikipedia.org/wiki/file:EscalaRichter>. Acesso em 19 de janeiro de 2014.

[9] Em <http://wikipedia.org/wiki/file:pH>. Acesso em 19 de janeiro de 2014.